**BÀI TOÁN CHIA KẸO EULER VÀ ỨNG DỤNG**

**HUỲNH KIM LINH**

**---------------------------**

***Bài toán1. (Bài toán chia kẹo của EULER****)*

Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình :

.

*Đây là bài toán quen thuộc của toán đếm tổ hợp. Có thể kể ra một vài phương pháp giải quyết đối với bài toán này như đệ quy, hàm sinh,… Nhưng ở đây chúng ta sẽ tiếp cận nó theo một góc nhìn khác : Song ánh. Một cách tự nhiên ta nghĩ đến việc thiết lập một ánh xạ từ tập {x1 , x2 , … ,xk }. Và để thuận tiện ta sẽ cho ánh xạ này chạy vào một dãy nhị phân , đưa bài toán trở về đếm tổ hợp thông thường.*

***Lời giải.***

Gọi A là họ các bộ {x1 , x2 , … xk }thoả mãn phương trình, B là họ các dãy nhị phân có độ dài *n + k -* 1 gồm *k* - 1 kí tự 0 và *n* kí tự 1.

Xét ánh xạ *f*  cho bởi quy tắc : Với mỗi bộ {x1 , x2 , … xk } ta thực hiện viết liên tiếp từ trái qua phải x1 số 1, rồi đến số 0, rồi lại đến x2 số 1, cứ như thế đến hết xn. Như vậy ứng với mỗi bộ{x1 , x2 , … xk } ta xây dựng được một dãy nhị phân có độ dài n +k-1 gồm k-1 số 0 và n số 1. Ta chứng minh được *f*  là một song ánh.

Vậy số nghiệm của phương trình (\*) sẽ tương ứng với số dãy nhị phân có độ dài n+k-1 gồm k-1 số 0 và n số 1. Mặt khác mỗi dãy nhị phân tương ứng với một cách chọn k-1 vị trí cho số 0 nên số dãy nhị phân thoả mãn là .

*Như vậy với cách giải trên, bằng phương pháp song ánh đã đưa bài toán tính số nghiệm nguyên về một bài toán vị trí của tổ hợp đơn giản bằng cách đưa về dãy nhị phân. Song ánh từ một tập số đến một dãy nhị phân được sử dụng khá nhiều trong các bài toán tổ hợp, đặc biệt là các bài toán ứng dụng của* ***Bài toán chia kẹo của EULER*** *. Ta có thể kể đến một số bài toán sau*:

***Bài toán 2.***

Một cửa hàng kem có bán ba loại kem: kem xoài, kem socola và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem.

1. Hỏi họ có bao nhiêu sự lựa chọn?
2. Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn trong đó cả ba loại kem đều có mặt?

***Lời giải.***

Ta thử liệt kê một vài sự lựa chọn

+ 2 kem xoài, 1 kem socola, 3 kem sữa

+ 1 kem xoài, 4 kem socola, 1 kem sữa

+ 2 kem xoài, 4 kem sữa

+ 3 kem xoài, 3 kem sữa

Một sự lựa chọn : a kem xoài, b kem socola và c kem sữa, được kí hiệu bởi một bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thỏa mãn a + b + c = 6.

Chẳng hạn bốn sự lựa chọn ở trên được kí hiệu là các bộ (2,1,3); (1,4,1); (0, 2, 4) và (3, 0, 3).

1. Với mỗi bộ ba (a, b, c) như vậy, ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các số 0 và 1) theo quy tắc sau: viết liên tiếp từ trái sang phải: a số 1, số 0, b số 1, số 0, rồi c số 1.



Như vậy mỗi bộ ba (a, b, c) được tương ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 kí tự) trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Rõ ràng phép tương ứng đó là một đơn ánh. Ngược lại với mỗi dãy 8 kí tự với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có: a số 1, số 0, b số 1, số 0 và c số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a, b, c) thỏa mãn a + b+ c = 6.

Như vậy, ta thiết lập một song ánh giữa tập hợp các lựa chọn với tập hợp các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0. Do đó số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Mặt khác, một dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1). Thành thử có  dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Do đó số các sự lựa chọn là 28.

*Để giải ý a) ta đã dùng một song ánh từ tập bộ ba loại kem vào một dãy nhị phân như trong bài toán chia kẹo của Euler. Tuy nhiên để giải ý b) ta không thể áp dụng ngay bài toán chia kẹo của Euler được vì trong bài toán chia kẹo của Euler ta cần tìm số nghiệm không âm của phương trình nhưng ở đây ta cần tìm các nghiệm dương. Khi đó để giải được ta cần sử dụng một phép song ánh đưa từ các số dương về các số không âm, sau đó mới sử dụng cách chứng minh của bài toán chia kẹo của Euler. Ta có thể có lời giải của ý b) như sau:*

1. Với mỗi bộ (a, b, c) thỏa mãn điều kiện trên, ta có tương ứng

với bộ (x, y, z) với x = a – 1; y = b – 1; z = c – 1.

Khi đó (x, y, z) là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện:

x + y + z = a + b + c – 3 = 3.

Dễ kiểm tra rằng đây là một phép song ánh giữa tập các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 6 với tập các bộ ba (x, y, z) là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện :

x + y + z = a + b + c – 3 = 3.

Bằng suy luận tương tự như câu a), ta tìm được số các sự lựa chọn là = 10.

***Ta sẽ có bài toán tổng quát sau:***

***Bài toán 3.***

Cho hai số nguyên dương m, n với m, n.

1. Tìm số bộ trong đó  là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện .
2. Tìm số bộ  trong đó  là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện .

***Lời giải.***

Bằng lí luận tương tự như trong bài toán 2, ta có kết quả là

1.  b) 

***Bài toán 4.***

1. *Trong không gian Oxyz, gọi S là tập hợp các điểm nguyên nằm phía trong hoặc ở trên đỉnh, cạnh và mặt của hình lập phương cạnh 999, trong đó các cạnh song song hoặc vuông góc với trục tọa độ, một đỉnh là và một đỉnh đối với nó là* *. Hỏi mặt phẳng*  *đi qua bao nhiêu điểm trong tập hợp S?*
2. *Cho m, n là các số nguyên dương. Xét 2n quả táo, 2n quả đào, 2n quả cam, 3m quả xoài, 3m quả nho và các quả cùng loại thì giống nhau. Gọi*  *là số cách chia số quả táo, đào, cam cho 2 người mà mỗi người nhận được 3n quả;*  *là số cách chia số quả xoài, nho cho 1 người và sử dụng ít hơn 3m quả. Chứng minh rằng* *với mọi n; m nguyên dương.*

***Lời giải.***

a) Rõ ràng các điểm thuộc S có dạng. Ta cần đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình sau :  thỏa mãn . Tương tự các bài toán chia kẹo Euler có ràng buộc ở trên, dùng nguyên lý bù trừ, ta có



b) Với cách chia táo – đào – cam, ta cần xét phương trình  với  Tương tự trên, ta đếm được



Dễ thấy rằng với mọi n thì  không chia hết cho 3, còn  chia hết cho 3 nên  với mọi số nguyên dương m, n.

Tiếp theo là một bài toán khá “kinh điển” về chủ đề này, bài toán “vé hạnh phúc”. Một vé hạnh phúc có 6 chữ số và tổng của nhóm 3 số đầu bằng tổng của nhóm 3 số cuối. Mục tiêu là cần đếm số vé hạnh phúc. Ở bài này, trước khi đưa về chia kẹo Euler, ta cần thực hiện một song ánh.

***Bài toán 5.***

Vé xe buýt có dạng  với  Một vé như trên thỏa mãn điều kiện  được gọi là “vé hạnh phúc”.

1. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình  bằng số nghiệm của phương trình  với .
2. Tính số vé hạnh phúc.

Lời giải.

a) Gọi A, B lần lượt là số nghiệm của phương trình  và phương trình .

Ta thấy rằng



Nếu đặt



Thì ta được



Do đó, một bộ nghiệm của phương trình  sinh ra một bộ nghiệm của phương trình  nên . Chứng minh tương tự, ta có  nên 

b) Đếm số nghiệm của phương trình

,

với 

Gọi  lần lượt là tập hợp nghiệm của phương trình (3) nhưng có các điều kiện 

Số nghiệm của (3) là  nên ta cần tính 

Xét : Đặt  thì ta có  và dễ thấy 

Tương tự, ta cũng có .

Xét :

Đặt  thì ta có  và dễ thấy 

Ngoài ra, ta thấy rằng  với mọi  nên



Vậy số các số may mắn là



Như trong đầu bài đã giới thiệu, chia kẹo Euler còn có tên gọi là bài toán “balls and urns”. Nó xuất phát từ bài toán đếm số vòng cổ necklace tạo ra bằng cách xâu nhiều viên hạt xanh và đỏ. Khi đó, các viên cùng màu sẽ tạo thành các vùng và số vị trí chuyển tiếp cũng bằng chính là số vùng đó. Trong phần còn lại, ta xét một trường hợp như thế.

***Bài toán 6.*** (Việt Nam 2014)

Cho đa giác đều 103 cạnh. Tô màu đỏ 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh các đỉnh còn lại. Gọi A là số cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.

a) Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A, B).

b) Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác để B = 14. Biết rằng hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được nhau qua một phép quay quanh tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

***Lời giải.***

a) Gọi k là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô xanh và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu đỏ và h là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô đỏ và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu xanh. Dễ thấy giữa 2 dãy đỏ là 1 dãy xanh và giữa 2 dãy xanh là 1 dãy đỏ nên h = k.

Gọi  là số lượng các đỉnh trong các dãy xanh;  là số lượng đỉnh trong các dãy đỏ thì 

Ngoài ra, rõ ràng nếu một dãy cùng màu có số lượng t thì có t – 1 cặp đỉnh liên tiếp cùng màu. Suy ra và tương tự . Do đó, các cặp  sẽ có dạng  với  Có tổng cộng 25 cặp như thế.

b) Do B = 14 nên theo đẳng thức đã xây dựng ở trên thì . Như thế, có tổng cộng 10 dãy xanh và 10 dãy đỏ.

Số nghiệm nguyên dương của các phương trình sau  lần lượt là . Do xếp trên một vòng tròn nên chỉ xét vị trí tương đối của nhóm với nhau chứ không xét vị trí cố định của từng nhóm.

Vậy số cách tô cần tìm là .

***Bài toán 7.*** (AIME 2011)

Một học sinh có 5 quả cầu màu xanh giống nhau và một số quả cầu màu đỏ giống nhau. Bạn ấy muốn xếp các quả cầu thành một dãy và nếu đặt a là số quả cầu mà quả bên phải nó cùng màu với nó, b là số quả cầu mà quả cầu bên phải nó khác màu với nó thì a = b. Gọi m là số lớn nhất các quả cầu màu đỏ có thể dùng sao cho tồn tại cách xếp m + 5 quả cầu thành một dãy thỏa mãn điều kiện nêu trên.

a) Xác định m.

b) Ứng với m ở trên, tìm số cách xếp các quả cầu để có a = b.

***Lời giải.***

a) Do có 5 quả cầu màu xanh và mỗi quả sẽ đặt cạnh không quá hai quả cầu đỏ (khác màu với nó) nên số cặp quả cầu khác màu nhau là . Suy ra . Ký hiệu quả cầu màu xanh, đỏ lần lượt là X, D thì có thể xây dựng dãy thỏa mãn đề bài từ dãy gốc như sau

DXDXDXDXDXDXD.

Sau đó thêm vào không quá 10 quả cầu màu đỏ nữa (vì mỗi quả sẽ làm tăng giá trị a lên 1 đơn vị). Từ đó suy ra .

b) Để đếm số cách xếp thỏa mãn, xét dãy 16 quả cầu đỏ. Ta cần xếp vào đây 5 quả cầu xanh sao cho không có hai quả nào cạnh nhau.

Gọi  là số lượng quả cầu đỏ bị chia ra bởi các quả cầu xanh thì



Khi đó, số cách xếp cần tìm là .

***Bài toán 8.*** (AIME 1986)

Cho xâu nhị phân: 001101001111011 có 4 cặp 01, 3 cặp 10, 5 cặp 11 và 2 cặp 00 đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu xâu nhị phân cùng tính chất như thế?

***Lời giải.***

Tương tự bài toán trên, ta thấy rằng các xâu nhị phân thỏa mãn đề bài phải có dạng

XYXYXYXY

trong đó X là một dãy các số 0 liên tiếp và Y là một dãy các số 1 liên tiếp. Như thế, có tổng cộng 4 dãy 0 và 4 dãy 1.

Rõ ràng trong một dãy có độ dài là k thì số lượng cặp giống nhau là k – 1. Gọi x,y,z,t là độ dài của 4 dãy 0 thì theo giả thiết, ta phải có



Số nghiệm nguyên dương của phương trình trên là .

Lại gọi m, n, p, q là độ dài của 4 dãy 1 thì



Số nghiệm nguyên dương của phương trình này là . Do hai dãy này chọn độc lập với nhau nên số xâu thỏa mãn là 10.56 = 560 xâu.

Nhận xét. Tổng quát: Hỏi với các số tự nhiên a,b,c,d nào thì tồn tại một xâu nhị phân có độ dài dương và có a cặp 01; b cặp 10; c cặp 11 và d cặp 00 đứng cạnh nhau?

Ta thấy rằng nếu xếp các số này lên vòng tròn thì các số 0 và 1 sẽ được tạo thành các nhóm rời nhau. Rõ ràng số lượng nhóm 0 bằng số lượng nhóm 1: Do đó, nếu cắt xâu tại ranh giới giữa hai nhóm thì số lượng một trong hai bộ 01 hoặc 10 sẽ giảm đi 1 đơn vị so với bộ kia.

Còn nếu cắt tại vị trí giữa các nhóm (trường hợp số lượng số trong nhóm lớn hơn 1) thì không làm thay đổi số lượng bộ 01 hoặc 10.

Trước hết, ta luôn có . Ngoài ra, dễ thấy rằng nếu c > 0, d > 0 thì phải tồn tại ranh giới giữa hai bộ nên lúc đó, ta phải có hoặc a > 0 hoặc b > 0.

Từ đây ta thấy điều kiện của các số a, b, c, d là:

(1) Nếu cd = 0 thì a = b = 0

(2) Nếu cd ≠ 0 thì  và a, b không đồng thời bằng 0

Đặt thì rõ ràng có tổng cộng k nhóm theo nhận xét ban đầu. Giả sử 

Gọi  là số lượng số 1 có trong từng nhóm thì rõ ràng



Số nghiệm dương của phương trình này là . Tương tự số cách sắp xếp các số 0 là . Vậy số các xâu nhị phân thỏa mãn là  với với .

Trong trường hợp k = 0 thì dễ thấy có 1 xâu thỏa mãn đề bài.

***Bài tập 9.***

a) Chứng minh số nghiệm nguyên của phương trình , với  là 

b) Rút gọn tổng sau 

***Gợi ý***

a) Ta có thể chia trường hợp n chẵn, lẻ để đếm cho thuận tiện.

b) Ta thấy  có thể viết thành  , đây chính là số nghiệm dương của phương trình . Do đó, A chính là số nghiệm dương của bất phương trình  Đây là bài toán đã giải quyết ở bài 1 của phần trước.